SUR UN PROBLEME DE DYNAMIQUE DES POPULATIONS

OUMAR TRAORE, ALBERT OUEDRAOGO
U.F.R./SEA-UNIVERSITE OUAGADOUGOU
03 BP-7021-OUAGADOUGOU 03
BURKINA-FASO

ABSTRACT. In this paper, a model for the dynamic of an age structured population is considered, in which the density $y$ depends on the time $t$, the age $a$ and the spatial variable $x$ belonging to $\Omega$ where $\Omega$ is the limited environment. Moreover, we assume that there are exchanges through the boundary $\partial \Omega$.

Here we prove the existence and the uniqueness of the solution.

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on considère une population structurée en âge, répartie dans un domaine $\Omega$. La dynamique de la population est décrite au moyen d’une fonction $y$, dépendant des variables $(t, a, x)$ où $t$ est le temps, $a$ l’âge et $x$ est la position géographique dans $\Omega$. On suppose qu’il y a échange d’individus entre la population et le milieu extérieur, et on montre alors l’existence et l’unicité de la solution.

1. INTRODUCTION

On s’intéresse à une population structurée en âge, répartie dans un domaine $\Omega$ de frontière assez régulière. La dynamique de la population est décrite au moyen d’une fonction $y$, dépendant des variables $(t, a, x)$ où $t$ est le temps, $a$ l’âge et $x$ est la position géographique dans $\Omega$.

Si on suppose que la variation de la population est due à la mort et à la migration, la densité $y$ sera solution d’équation aux dérivées partielles de type

$$
\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a} - \Delta y + \mu y = 0
$$

où $\Delta$ désigne le laplacien, $\nu$ le vecteur normal unitaire extérieur au domaine $\Omega$ de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et $\mu$ dépendant de $(t, a, x)$ représente le taux de mortalité.

Si à l’instant initial, on a une densité $y_0$, on doit avoir $y(0, a, x) = y_0(a, x)$ presque partout dans $Q_\omega = [0, T] \times \Omega$ où $\omega$ est l’espérance de vie maximale de l’espèce.

Enfin, on suppose que l’on a un processus de naissance de type

$$
y(t, 0, x) = F \left( \int_0^\omega \beta y da \right) = \left( \int_0^\omega \beta y da \right) \Phi \left( \int_0^\omega \beta y da \right)
$$

pour presque tout $(t, x) \in Q_T = [0, T] \times \Omega$, $\beta$ étant le taux de natalité. Un exemple de ce type de processus de naissance est le processus de naissance dans une population de poissons et de tortues, où $\int_0^\omega \beta y da$ représentera le nombre d’œufs produits et $\Phi$ une fonction donnant la proportion d’œufs qui arriveront à maturité.

Bon nombre d’auteurs se sont intéressés à ces types de problèmes; cf.[3],[4],[5],[6],[8],[9].

AMS classification: 92D25
Mots clés: population structure en âge et en espace, semi-groupe d’opérateurs linéaires.

Dans [8] et [9], les auteurs se sont intéressés au cas où $v$ est identiquement nulle et $\mu$ et $\beta$ dépendent seulement de l’âge $a$.

Le cas $v = 0$ et $\phi = \text{constante}$ est étudié de façon approfondie dans [4] et [6].

Dans ce travail, on étudie le cas où $v$ n’est pas identiquement nulle, $\mu$ et $\beta$ dépendant des variables $t$, $a$ et $x$.

Le plan de ce travail est le suivant: dans le second paragraphe, nous introduisons les notations, quelques résultats préliminaires, les hypothèses du travail et l’énoncé du résultat principal; dans le troisième paragraphe, on donnera la preuve du résultat principal.

2. Notations, hypothèses, résultats

2.1. Notations. Nous noterons $U = ]0, T[\times ]0, \omega[,$ $V = L^2(U; H^1(\Omega))$ où $H^1(\Omega)$ représente l’espace de Sobolev d’ordre 1 et $L^2(U; H^1(\Omega))$ l’espace des fonctions mesurables sur $U$ à valeurs dans $H^1(\Omega)$ qui sont de carré intégrable sur $U$.

On note $Q = U \times \Omega$.

En identifiant $H = L^2(Q)$ à son dual, on peut écrire $V \subset H \subset V'$ où $V'$ est l’espace des fonctions continues sur $U$ à valeurs dans $H^1(\Omega)$.

On note $\Lambda_0 = \partial_t + \partial_a$ où $\partial_t$ et $\partial_a$ représentent respectivement les dérivées partielles par rapport à $t$ et $a$ dans $\mathcal{D}'(U; (H^1(\Omega))^n)$, où $\mathcal{D}'(U; (H^1(\Omega))^n)$ est l’ensemble des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(U)$ défini dans $H^1(\Omega)$.

On notera $dtda = dU$, $dQ = dtdadx$ et $d\Sigma = dtdad\sigma$ où $d\sigma$ est la mesure induite par $dx$ sur $\partial\Omega = \Gamma$.

Notons $W(U) = \{\varphi \in L^2(U; H^1(\Omega)) : \Lambda_0\varphi \in L^2(U; (H^1(\Omega))^n)\}$.

On notera $\nu$ la normale unitaire extérieure à $\Omega$.

2.2. Notion de solution. On considère le système

$$(S_0) \begin{cases} 
\partial_t y + \partial_a y - \Delta y + \mu y = 0 \\
\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = v \\
y(0, a, x) = y_0(a, x) \\
y(t, 0, x) = F(\int_0^t \beta yda)
\end{cases}$$

Définition 2.1. On appelle solution de $(S_0)$ une fonction $y$ de $W(U)$ vérifiant

(i) $y \geq 0$ presque partout dans $Q$;

(ii) pour tout $\phi \in V$,

$$\int_U \langle \Lambda_0 y(t, a), \phi\rangle_{(H^1(\Omega))^n, H^1(\Omega)} dtda + \int_Q (\nabla y \nabla \phi + \mu y \phi) dQ = \int_\Sigma v\phi|_\Sigma d\Sigma;$$

(iii) $y(0, a, x) = y_0(a, x)$ pour presque tout $(a, x) \in Q_\omega$;

(iv) $y(t, 0, x) = F(\int_0^t \beta yda)$ presque partout dans $Q_T$.

Remarque 2.2. La notation $\nabla$ désigne le gradient par rapport à $x$. La condition (i) est naturelle car $y$ est une densité de population.

Multiplier la première équation de $(S_0)$ par une fonction test de $\mathcal{D}(U, C^1(\Omega))$, puis en admettant que $y$ est assez régulière (cf. [6]), on obtient (ii) par intégration par parties.

2.3. Hypothèses. Dans tout ce travail, on supposera que

$(H_1)$: $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N = 1, 2$, ou 3 dont la frontière $\Gamma$ est une variété différentiable de classe $C^\infty$, $\Omega$ étant localement d’un seul côté de $\Gamma$;
$(H_2)$: $\mu \in L^\infty(Q)$ et $\mu \geq 0$ presque partout dans $Q$;

$(H_3)$: $\beta \in L^\infty(Q)$ avec $\beta \geq 0$ presque partout dans $Q$;

$(H_4)$: $F(\alpha) = \alpha \Phi(\alpha)$ est une fonction positive, Lipschitzienne de rapport $K_F$;

$(H_5)$: $v \in L^2(\Sigma), v \geq 0$ presque partout sur $\Sigma$;

$(H_6)$: $y_0 \in L^2(Q_\omega), y_0 \geq 0$ presque partout dans $Q_\omega$.

2.4. Résultats préliminaires. Enonçons un résultat de trace, fondamental pour la suite.

**Lemme 2.3.** Pour tout $y \in W(U)$, on peut définir la trace en $t = t_0$ dans $L^2(Q_\omega)$. On peut également définir la trace en $a = a_0$ dans $L^2(Q_T)$. Les applications “trace” sont continues pour les topologies faible et forte.

De plus, on a la formule d'intégration par parties: pour tous $y, z \in W(U)$,

$$
\int_U \langle \Lambda_0 y, z \rangle dU = \int_{Q_\omega} [(zy)(T, a, x) - (zy)(0, a, x)] d\omega dx + \int_{Q_T} [(zy)(t, \omega, x) - (zy)(t, 0, x)] d\tau dx - \int_U \langle \Lambda_0 z, y \rangle dU.
$$

Ce résultat se montre en adaptant la méthode de [7] (chapitre 1.§2.2).

On a aussi le lemme suivant:

**Lemme 2.4.** On suppose $(H_1)$. Soit $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ l’application trace définie par $\gamma_0(\varphi) = \varphi|_{\Gamma}$. Alors si $\varphi \in H^1(\Omega)$ avec $\varphi \geq 0$ presque partout dans $\Omega$, on a $\gamma_0(\varphi) \geq 0$ presque partout sur $\Gamma = \partial \Omega$.

**Preuve:**

a) Remarquons d'abord que si $v_n \rightarrow v$ dans $L^2(\Gamma)$ et si $v_n \geq 0$ presque partout sur $\Gamma$ alors $v \geq 0$ presque partout sur $\Gamma$. En effet, $(v_n - v) = (v_n - v^+) + v^-$ avec $v^+ = \max(v, 0)$ et $v^- = \max(-v, 0)$ alors

$$
\|v_n - v^+\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|v_n - v\|_{L^2(\Gamma)}
$$

et donc $v_n \rightarrow v^+$. Par suite $v^+ = v$ presque partout sur $\Gamma$.

b) Remarquons aussi que si $\varphi \geq 0$ presque partout dans $\Omega$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$, on peut construire par régularisation et troncature une suite $(\phi_n)$ d’éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n \geq 0$ dans $\Omega$;

- $\phi_n|_{\overline{\Omega}} \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\phi_n|_{\overline{\Omega}} \rightarrow \varphi$ dans $H^1(\Omega)$ (cf. par exemple [2]).

Alors par définition de $\gamma_0$, on a

$$
\gamma_0(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_0(\phi_n|_{\overline{\Omega}});
$$

or $\gamma_0(\phi_n|_{\overline{\Omega}}) \geq 0$ presque partout sur $\Gamma$, alors d’après a) $\gamma_0(\varphi) \geq 0$ presque partout sur $\Gamma$. □

Considérons la famille $(G(t))_{t \geq 0}$ d’opérateurs définis sur $X$ par

$$
(G(h)\varphi)(t, a) = \begin{cases} 
\varphi(t - h, a - h) & \text{pour presque tout } (t, a) \in [h, T] \times [h, \omega] \\
0 & \text{sinon}
\end{cases}
$$

où

$$
X = L^2(U; H^1(\Omega)) \quad \text{(resp. } X = L^2(U; L^2(\Omega)) \text{ ou } X = L^2(U; (H^1(\Omega))^*))
$$
Considérons également l’opérateur non borné Λ de domaine

$$D(\Lambda, X) = \{ \varphi \in X : \Lambda_0 \varphi \in X; \varphi(0, \cdot) = 0 \text{ presque partout dans } [0, \omega[ \}$$

$$\varphi(\cdot, 0) = 0 \text{ presque partout dans } [0, T[ \}$$

défini par $\Lambda_0 = -\Lambda_0 \varphi$ pour tout $\varphi \in D(\Lambda, X)$. On vérifie sans difficulté que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de classe $C^0$ sur $X$ de générateur infinitésimal $\Lambda$. De plus, on prouve que $\|G(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \leq 1$.

Considérons maintenant la forme bilinéaire définie pour presque tout $(t, a) \in U$ par

$$B(t, a, \varphi, \phi) = \int_{\beta} [\nabla \varphi \phi + \pi \varphi \phi] \, dx$$

pour $(\varphi, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ où $\pi = \mu + \lambda, \lambda > 0$. On voit que pour presque tout $(t, a) \in U$, $B(t, a, \cdot, \cdot)$ est continue et coercive sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Il existe alors $A(t, a) \in (H^1(\Omega))^t$ pour presque tout $(t, a) \in U$ tel que $B(t, a, \varphi, \phi) = \langle A(t, a) \varphi, \phi \rangle$. Pour $\varphi \in L^2(U, H^1(\Omega))$, on définit l’opérateur $M_p$ par $M_p \varphi = 0(t, a) \mapsto A(t, a) \varphi(t, a)^h$ qui est évidemment mesurable sur $U$ à valeurs dans $(H^1(\Omega))^t$. Par définition de $A(t, a)$, il existe $c > 0$ tel que $\langle M_p \varphi, \varphi \rangle_{L^2(U, H^1(\Omega))} \geq c \| \varphi \|_{L^2(U, H^1(\Omega))}^2$.

Alors compte tenu de tout ce qui précède, on tire de [7] que $\Lambda_0 + M$ est un isomorphisme de $V \cap D(\Lambda, V^t)$ dans $V^t$. On peut donc déduire que

**Théorème 2.5.** Le problème de trouver $y \in W(U)$ tel que pour tout $\varphi \in L^2(U, H^1(\Omega))$

$$\left\{ \int_U \langle A_0 y, \phi \rangle dU + \int_Q [\nabla y \nabla \phi + (\mu + \lambda) y \phi] dQ = \int_Q < f, \phi > dQ \right. \left. \begin{array}{c}
\text{presque partout dans } Q_\omega \\
\text{presque partout dans } Q_T
\end{array} \right.$$

avec $f \in L^2(U, (H^1(\Omega))^t)$, admet une solution unique.

Enonçons maintenant le résultat principal de cet article:

**Théorème 2.6.** Sous les hypothèses $(H_1) - (H_6)$, le problème $(S_0)$ admet une solution unique notée $y(v)$. De plus, quels que soient $v_1$ et $v_2 \in L^2(\Sigma)$, si $v_1 \leq v_2$ presque partout sur $\Sigma$ alors $y(v_1) \leq y(v_2)$ presque partout dans $Q$.

La deuxième assertion signifie que lorsque $v$ est majorée sur $\Sigma$, alors $y(v) \in L^\infty(Q)$.

3. Preuve du Théorème 2.6

La preuve sera établie en trois étapes.

**Étape 1**

Considérons le système:

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\Lambda_0 \xi - \Delta \xi + (\mu + \lambda) \xi = 0 \\
\frac{\partial \xi}{\partial \nu} = \nu \\
\xi(0, a, x) = y_0(a, x) \\
\xi(t, 0, x) = y_1(t, x)
\end{array} \right.$$

où $y_0 \in L^2(Q_\omega), y_1 \in L^2(Q_T)$ et $\nu = e^{-\lambda t} v$.

Nous allons montrer que $(S_1)$ admet une solution unique $\xi$, i.e qu’il existe un unique $\xi \in W(U)$ tel que

$$(R_0) \quad \int_U \langle A_0 \xi, \varphi \rangle dU + \int_Q (\nabla \varphi \nabla \xi + (\mu + \lambda) \xi \varphi) dQ = \int_\Sigma v \varphi|_\Sigma d\Sigma$$
pour tout \( \varphi \in V \) et

\[
(R_1) \quad \xi(0, a, x) = y_0(a, x) \quad \text{et} \quad \xi(t, 0, x) = y_1(t, x), \quad y_1 \geq 0 \quad \text{presque partout dans} \; Q_T.
\]

Soit \((U_n) \subset \mathcal{D}(Q_\omega)\) et \((W_n) \subset \mathcal{D}(Q_T)\) telle que \(U_n \to y_0\) dans \(L^2(\mathcal{D}(Q_\omega))\) et \(W_n \to y_1\) dans \(L^2(\mathcal{D}(Q_T))\). Soient \(\alpha_2, \alpha_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\) tel que \(\alpha_1 = 1\) sur \([0, T]\) et \(\alpha_2 = 1\) sur \([0, \omega]\). Posons

\[
\varphi_n(a, t, x) = \alpha_1(t)U_n(a, x) + \alpha_2(a)W_n(t, x).
\]

On a \(\varphi_n \in C^\infty(\overline{Q})\) et l'on a \(\varphi_n(0, \cdot, \cdot) = U_n \to y_0\) et \(\varphi_n(\cdot, 0, \cdot) = W_n \to y_1\). Posons \(f = f_0 + \Delta \varphi_n - (\mu + \lambda)\varphi_n - \varphi_n\lambda \Delta_0\varphi_n\), où \(f_0\) est l'application définie sur \(V\) par \(f_0(\varphi) = \int_V \varphi\Sigma d\Gamma\). Il est clair que \(f : \varphi \mapsto f_0(\varphi) + \int_Q [\Delta \varphi_n - (\mu + \lambda)\varphi_n - \varphi_n\lambda \Delta_0\varphi_n]dQ\) est continue et linéaire sur \(V\).

Par suite, du Théorème 2.5, on tire l'existence de \(\tilde{\theta}_n \in \mathcal{W}(U)\) pour tout \(n \in \mathbb{N}\) tel que pour tout \(\varphi \in L^2(U, H^1(\Omega))\)

\[
(S_2) \quad \begin{cases} 
\int_U \langle \Lambda_0 \tilde{\theta}_n, \varphi \rangle dU + \int_Q [\nabla \tilde{\theta}_n \nabla \varphi + (\mu + \lambda)\tilde{\theta}_n \varphi]dQ \\
\theta_n(0, a, x) = 0 \\
\theta_n(t, 0, x) = 0.
\end{cases}
\]

En posant \(\theta_n = \tilde{\theta}_n + \varphi_n\), on a \(\theta_n \in \mathcal{W}(U)\) et l'on a pour tout \(\varphi \in L^2(U, H^1(\Omega))\)

\[
(S_3) \quad \begin{cases} 
\int_U \langle \Lambda_0 \theta_n, \varphi \rangle dU + \int_Q [\nabla \theta_n \nabla \varphi + (\mu + \lambda)\theta_n \varphi]dQ = \int \mathfrak{m} \varphi d\Sigma \\\n\theta_n(0, a, x) = U_n(a, x) \quad \text{pour presque tout} \; (a, x) \in Q_\omega \\
\theta_n(t, 0, x) = W_n(t, x) \quad \text{pour presque tout} \; (t, x) \in Q_T.
\end{cases}
\]

Prenons \(\varphi = \theta_n\) dans la première équation et utilisons la formule d'intégration par parties; on obtient

\[
(R_2) \quad \frac{1}{2} \|\theta_n(T\cdot)\|^2 + \frac{1}{2} \|\theta_n(\cdot, \omega\cdot)\|^2 - \frac{1}{2} \|\theta_n(0, \cdot, \cdot)\|^2 - \frac{1}{2} \|\theta_n(\cdot, 0, \cdot)\|^2 + \|\nabla \theta_n\|^2 + \|\sqrt{\mu + \lambda} \theta_n\|^2 = \int \mathfrak{m} \varphi d\Sigma.
\]

En utilisant l'inégalité de Young et la continuité de l'application trace \(\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial \Omega)\) (cf. [7]), on trouve que

\[
(R_3) \quad \int \mathfrak{m} \varphi d\Sigma \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{\inf(1, \lambda)}{2} \|\theta_n\|^2_{L^2(U, H^1(\Omega))}.
\]

On tire de \((R_2)\) et \((R_3)\) que

\[
\frac{\inf(1, \lambda)}{2} \|\theta_n\|^2_{L^2(U, H^1(\Omega))} \leq C \|\varphi\|^2 + \frac{1}{2} \|U_n\|^2 + \frac{1}{2} \|W_n\|^2.
\]

Alors \((\theta_n)\) est bornée dans \(V\).

Maintenant, quels que soient \(\varphi \in H^1(\Omega)\) et \(\theta \in \mathcal{D}(U)\); on a

\[
\int_U \langle \Lambda_0 \theta(t, a), \varphi \times \theta \rangle dU + \int_Q \theta [\nabla \theta \nabla \varphi + (\mu + \lambda)\varphi \theta] dt d\sigma = \int \mathfrak{m} \varphi \gamma d\Sigma;
\]

alors pour presque tout \((t, a) \in U\)

\[
\langle \Lambda_0 \theta(t, a), \varphi \rangle = - \int [\nabla \theta + \mu \theta \varphi] d\sigma + \int \mathfrak{m}(t, a) \varphi |\gamma| d\Sigma.
\]

D'où

\[
\|\Lambda_0 \theta(t, a)\|_{L^2(U, H^1(\Omega))} \leq (\lambda + \mu_\infty) \|\theta(t, a)\| + C \|\mathfrak{m}(t, a)\| \|\varphi\|_{H^1(\Omega)};
\]

alors

\[
\|\Lambda_0 \theta\|_{L^2(U, H^1(\Omega))} \leq (\lambda + \mu_\infty) \|\theta\|_{L^2(U, H^1(\Omega))} + C \|\mathfrak{m}\|_{L^2(\Sigma)}.
\]
Ainsi la suite \((\Lambda_{\theta_n})\) est bornée dans \(L^2(U,(H^1(\Omega))^t)\). Par conséquent on peut en extraire une sous-suite notée toujours \((\Lambda_{\theta_n})\) telle que \((\Lambda_{\theta_n}) \to j\) dans \(L^2(U,(H^1(\Omega))^t)\) et \(\theta_n \to \xi\) dans \(L^2(U,H^2(\Omega))\) et \(\theta_n \to \xi\) dans \(L^2(Q)\), car l'injection de \(L^2(U,H^2(\Omega))\) dans \(L^2(Q)\) est continue. Montrons que \((\theta_n)\) converge dans \(L^2(Q)\). Posons \(\theta^m_n = \theta_m - \theta_n\). La fonction \(\theta^m_n\) vérifie la propriété suivante: pour tout \(\varphi \in L^2(U;V)\)
\[
\begin{align*}
\int_U (\Lambda_{\theta_n} \theta^m_n, \varphi) dU + \int_Q [\nabla \theta^m_n \nabla \varphi + (\mu + \lambda) \theta^m_n \varphi] dQ &= 0 \\
\theta^m_n(0,a,x) &= U_m(a,x) - U_n(a,x) \quad \text{pour presque tout} \quad (a,x) \in Q_\omega \\
\theta^m_n(t,0,x) &= W_m(t,x) - W_n(t,x) \quad \text{pour presque tout} \quad (t,x) \in Q_T
\end{align*}
\]
Prenons alors \(\varphi = \theta^m_n\) dans le système précédent et utilisons la formule d'intégration par parties; on trouve après quelques calculs
\[
\lambda \|\theta^m_n\|^2 \leq \frac{1}{2} \|U_m - U_n\|^2 + \frac{1}{2} \|W_m - W_n\|^2.
\]
Comme \((U_n)\) et \((W_n)\) sont de Cauchy, on tire que \((\theta_n)\) est de Cauchy et donc converge dans \(L^2(Q)\).

Par conséquent \(\theta_n \to \xi\) dans \(L^2(Q)\) et donc \(\Lambda_{\theta_n} \to \Lambda_\xi\) dans \(D'(U,(H^1(\Omega))^t)\). L'injection de \(L^2(U,(H^1(\Omega))^t)\) dans \(D'(U,(H^1(\Omega))^t)\) étant continue, on tire alors de \(\Lambda_{\theta_n} \to j\) dans \(L^2(U,(H^1(\Omega))^t)\) que \(\Lambda_{\theta_n} \to j\) dans \(D'(U,(H^1(\Omega))^t)\).

De l'unicité de la limite on déduit que \(\Lambda_\xi = j \in L^2(U,(H^1(\Omega))^t)\), et donc \(\xi \in W(U)\). Soient \(\varphi \in D(U)\) et \(\phi \in H^1(\Omega)\); alors \(\varphi \otimes \phi \in V\) et par suite
\[
\int_U (\Lambda_{\theta_n} \varphi \otimes \phi) dU + \int_Q [\nabla \varphi \nabla (\varphi \otimes \phi) + (\mu + \lambda) \theta_n (\varphi \otimes \phi)] dQ = \int_\Sigma \overline{\varphi} (\varphi \otimes \phi) |_\Sigma d\Sigma,
\]
soit
\[
- \int_Q \theta_n \Lambda_\xi \varphi \phi dQ + \int_Q [\nabla \varphi \nabla (\varphi \otimes \phi) + (\mu + \lambda) \theta_n \phi] dQ = \int_\Sigma \overline{\varphi} (\varphi \otimes \phi) |_\Sigma d\Sigma
\]
car \(\varphi \in D(U)\).

D'où en passant à la limite
\[
- \int_Q \xi \Lambda_\xi \varphi \phi dQ + \int_Q [\nabla \xi \nabla (\varphi \otimes \phi) + (\mu + \lambda) \xi (\varphi \otimes \phi)] dQ = \int_\Sigma \overline{\varphi} (\varphi \otimes \phi) |_\Sigma d\Sigma,
\]
i.e.
\[
\int_U (\Lambda_\xi \varphi \otimes \phi) dU + \int_Q [\nabla \xi \nabla (\varphi \otimes \phi) + (\mu + \lambda) \xi (\varphi \otimes \phi)] dQ = \int_\Sigma \overline{\varphi} (\varphi \otimes \phi) |_\Sigma d\Sigma.
\]
On en déduit la propriété \((R_0)\) parce que \(D(U) \otimes H^1(\Omega)\) est dense dans \(L^2(U;V)\).

Rappelons que \(\theta_n \to \xi\) dans \(W(U)\). Alors de la continuité des applications trace (cf. Lemme 2.3), on tire que
\[
(R_4) \quad \xi(0,a,x) = y_0(a,x) \quad \text{pour presque tout} \quad (a,x) \in Q_\omega
\]
et
\[
(R_5) \quad \xi(t,0,x) = y_1(t,x) \quad \text{pour presque tout} \quad (t,x) \in Q_T.
\]

Montrons maintenant la positivité de \(\xi\).

Ecrivons \(\xi = \xi^+ - \xi^-\) où \(\xi^+ = \max(\xi,0)\) et \(\xi^- = \max(-\xi,0)\). On a \(\xi^+ \in V\) et \(\xi^- \in V\). En utilisant la densité de \(H^1(Q)\) dans \(V\) et le Lemme 2.3, on montre facilement que si \(\psi \in W(U)\), on a
\[
(R_6) \quad \int_U (\Lambda_\psi \psi^-) dU = -\frac{1}{2} \|\psi^-(T,\cdot,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi^-(0,\cdot,\cdot)\|^2 - \frac{1}{2} \|\psi^-(-,\omega,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi^-(-,0,\cdot)\|^2.
\]
Notons que
\[ (R_7) \quad \int_Q (\nabla\xi \nabla \xi^- + (\mu + \lambda)\xi^-) \, dQ = - \int_Q \left[ (\nabla \xi^-)^2 + (\mu + \lambda)(\xi^-)^2 \right] \, dQ. \]

Prenons \( \varphi = \xi^- \) dans \( R_0 \) et utilisons \( (R_6) \) et \( (R_7) \). On obtient alors :

\[ \lambda \|\xi^-\|_{L^2(Q)}^2 \leq \frac{1}{2}\|\xi - (T, \cdot, \cdot)\|^2 - \frac{1}{2}\|\psi - (\cdot, \omega, \cdot)\|^2. \]

D'où \( \xi^- = 0 \) presque partout dans \( Q \). Alors

\[ (R_8) \quad \xi = \xi^+ \geq 0 \quad \text{presque partout dans} \quad Q. \]

Vérifions maintenant l’unicité. Si \( \xi_1 \) et \( \xi_2 \) sont deux solutions de \( (S_1) \), alors \( \xi = \xi_1 - \xi_2 \) est solution de

\[ (S_4) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\Lambda_0 \xi - \Delta \xi + (\mu + \lambda)\xi = 0 \\
\frac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0 \\
\xi(0, a, x) = 0 \\
\xi(t, 0, x) = 0
\end{array} \right. \]

Multiplions la première équation de \( (S_4) \) par \( \xi \) et utilisons la formule d’intégration par parties; on obtient que

\[ \frac{1}{2}\|\xi(T, \cdot, \cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi(\cdot, \omega, \cdot)\|^2 + \|\nabla \xi\|^2 + \|\mu + \lambda \xi\|^2 = 0. \]

Alors \( \lambda \|\xi\|^2 \leq 0 \) d'où on déduit que \( \xi = 0 \).

**Étape 2**

Dans cette étape nous allons montrer que \( (S_0) \) admet une solution unique. Posons

\[ y_1(t, x) = \left( \int_0^\omega \beta zda \right) \Phi \left( \int_0^\omega \beta e^{\lambda z} da \right) \]

avec \( z \in L^2(Q) \) et \( z \geq 0 \) presque partout dans \( Q \). Il est clair que \( y_1 \in L^2(Q_T) \) et que \( y_1 \geq 0 \) presque partout dans \( Q_T \). Par conséquent, de la première étape on tire l’existence et l’unicité d’une solution du système

\[ (S_5) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\Lambda_0 \xi - \Delta \xi + (\mu + \lambda)\xi = 0 \\
\frac{\partial \xi}{\partial \nu} = \varphi \\
\xi(0, a, x) = y_0(a, x) \\
\xi(t, 0, x) = \left( \int_0^\omega \beta zda \right) \Phi \left( \int_0^\omega \beta e^{\lambda z} da \right)
\end{array} \right. \]

Par conséquent, à \( z \) on peut associer une unique solution \( \xi \) de \( (S_5) \).

On définit l’espace \( L^2(Q)_+ \) par

\[ L^2(Q)_+ := \{ \varphi \in L^2(Q), \varphi \geq 0 \quad \text{presque partout dans} \quad Q \} \]

et on note \( \eta \) l’application de \( L^2(Q)_+ \rightarrow L^2(Q)_+ \) qui à \( z \) associe \( \xi \).

Soient \( z_1 \) et \( z_2 \in L^2(Q)_+ \). Soient \( \xi_1 \) et \( \xi_2 \) les solutions correspondantes; on a donc

\[ \left\{ \begin{array}{l}
\Lambda_0(\xi_1 - \xi_2) - \Delta(\xi_1 - \xi_2) + (\mu + \lambda)(\xi_1 - \xi_2) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial \nu}(\xi_1 - \xi_2) = 0 \\
(\xi_1 - \xi_2)(0, a, x) = 0 \\
(\xi_1 - \xi_2)(t, 0, x) = \left( \int_0^\omega \beta z_1 da \right) \Phi \left( \int_0^\omega \beta e^{\lambda z_1 da} \right) - \left( \int_0^\omega \beta z_2 da \right) \Phi \left( \int_0^\omega \beta e^{\lambda z_2 da} \right)
\end{array} \right. \]
En multipliant la première équation par \( \xi_1 - \xi_2 \), et en utilisant la formule d'intégration par parties, on arrive après quelques calculs à l'inégalité

\[
\lambda \| \xi_1 - \xi_2 \|_{L^2(Q)}^2 \leq \frac{K^2 \omega \beta_\infty^2}{2} \| z_1 - z_2 \|_{L^2(Q)}^2 \quad \text{où} \quad \beta_\infty = \| \beta \|_{L^\infty(Q)}.
\]

Il suffit alors de choisir \( \lambda > \frac{K^2 \omega \beta_\infty^2}{2} \) pour que \( \eta \) soit strictement contractante.

Pour \( \lambda > \frac{K^2 \omega \beta_\infty^2}{2} \), il existe \( z \in L^2(Q) \) telle que \( z \) soit solution de

\[
\begin{aligned}
\Lambda_0 z - \Delta z + (\mu + \lambda) z &= 0 \\
\frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} &= \overline{y} \\
z(0, a, x) &= y_0 \\
z(t, 0, x) &= \left( \int_0^\omega \beta z da \right) \Phi \left( \int_0^\omega \beta e^{\lambda t} da \right)
\end{aligned}
\]

Si on pose \( y = e^{\lambda t} z \), on aura \( \Lambda_0 y = \lambda y + e^{\lambda t} \Lambda_0 z \). Par suite, pour tout \( \phi \in V \),

\[
\int_U \langle \Lambda_0 y, \phi \rangle dU + \int_Q (\nabla y \phi + \mu y \phi) dQ = \int_U \langle \Lambda_0 z, e^{\lambda t} \phi \rangle dU + \int_Q (\nabla z (e^{\lambda t} \phi) + (\mu + \lambda) z (e^{\lambda t} \phi)) dQ;
\]

d'où

\[
\begin{aligned}
\int_U \langle \Lambda_0 y, \phi \rangle dU + \int_Q (\nabla y \nabla \phi + \mu y \phi) dQ &= \int_\Sigma \overline{w} (e^{\lambda t} \phi) \mid_\Sigma d\Sigma \\
&= \int_\Sigma \overline{w} e^{-\lambda t} e^{\lambda t} \phi \mid_\Sigma d\Sigma \\
&= \int_\Sigma \overline{w} \phi \mid_\Sigma d\Sigma
\end{aligned}
\]

et

\[
y(0, a, x) = e^{0} z(t, 0, x) = y_0(a, x)
\]

\[
y(t, 0, x) = e^{\lambda t} z(t, 0, x) = \left( \int_0^\omega \beta z da \right) \Phi \left( \int_0^\omega \beta y da \right) = \left( \int_0^\omega \beta y da \right) \Phi \left( \int_0^\omega \beta y da \right)
\]

Cette fonction \( y \) est donc l'unique solution de (S_0).

**Etape 3**

Montrons que la solution du système croît avec la valeur de \( \nu \).

On revient au système auxiliaire suivant:

\[
(S_6) \begin{cases}
\Lambda_0 \varphi - \Delta \varphi + (\mu + \lambda) \varphi = 0 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \overline{y} \\
\varphi(0, a, x) = \varphi_0(a, x) \\
\varphi(t, 0, x) = \left( \int_0^\omega \beta \theta da \right) \Phi \left( \int_0^\omega \beta e^{\lambda t} \theta da \right)
\end{cases}
\]

avec \( \theta \in L^2(Q) \) et \( \lambda > \frac{K^2 \omega \beta_\infty^2}{2} \). Alors l'application \( \eta : \theta \rightarrow \varphi \) est strictement contractante.

Soient \( v_1 \) et \( v_2 \) deux éléments de \( L^2(\Sigma) \) tels que \( 0 \leq v_1 \leq v_2 \). Nous allons adopter la méthode utilisée dans [4]. Soit \( \theta \in L^2(Q) \) fixée. Notons \( \eta^i \) l'application de \( L^2(Q) \rightarrow L^2(Q) \) qui à \( \varphi \) associe \( \eta^i(\varphi) \) solution pour \( v = v_i \).

Posons

\[
\begin{cases}
y_{i,0} = \theta \quad \text{pour} \quad i = 1, 2 \\
y_{i,n+1} = \eta^i(y_{i,n})
\end{cases}
\]
Nous allons prouver par récurrence que $y_1^{1n} \leq y_2^{2n}$ presque partout dans $Q$. En effet pour $n = 1$, posons $y = y_2^{21} - y_1^{11}$; alors $y$ est solution de

$$
\begin{cases}
\Lambda_0 y - \Delta y + (\mu + \lambda)y = 0 \\
\frac{\partial y}{\partial x} = \nu_2 - \nu_1 \\
y(0, a, x) = 0 \\
y(t, 0, x) = 0
\end{cases}
$$

Alors, d’après la deuxième étape, comme $\nu^2 - \nu^1 \geq 0$ presque partout sur $\Sigma$ on a $y \geq 0$ presque partout dans $Q$, i.e $y_2^{21} \geq y_1^{11}$ presque partout dans $Q$.

Supposons que $y_1^{1n} \leq y_2^{2n}$ presque partout dans $Q$. Posons $\psi = \eta^2(y_1^{1n})$ alors $\psi \leq y_2^{2n+1} = \eta^2(y_2^{2n})$ presque partout dans $Q$, car $y_1^{1n} \leq y_2^{2n}$. Remarquons que

$$
\begin{cases}
\Lambda_0 \psi - \Delta \psi + (\mu + \lambda)\psi = 0 \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu_2 \\
\psi(0, a, x) = y_0(a, x) \\
\psi(t, 0, x) = \left(\int_0^\omega \beta y_1^{1n} da\right) \Phi \left(\int_0^\omega \beta y_1^{1n} da\right).
\end{cases}
$$

Comme

$$
\begin{cases}
\Lambda_0 y_1^{1n+1} - \Delta y_1^{1n+1} + (\mu + \lambda)y_1^{1n+1} = 0 \\
\frac{\partial y_1^{1n+1}}{\partial x}(0, a, x) = y_0(a, x) \\
y_1^{1n+1}(t, 0, x) = \left(\int_0^\omega \beta y_1^{1n} da\right) \Phi \left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t}y_1^{1n} da\right)
\end{cases}
$$

avec $\nu_1 \leq \nu_2$ presque partout dans $Q$. On a $y_1^{1n+1} \leq \psi$ presque partout dans $Q$. Alors on a $y_1^{1n+1} \leq y_2^{2n+1}$ presque partout dans $Q$. Le résultat annoncé vient par passage à la limite.

4. Conclusion

La notion de solution ainsi obtenue nous permet d’examiner comme dans [1], la contrôlabilité du système $(S_0)$ à l’instant $T$ fixé.

Cela fera l’objet d’un prochain article.

References


E-mail address: traoreoumar@univ-ouaga.bf, a-s-oued@fast-univ-ouaga.bf